Mécanique - Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

Ce qu'il faut retenir…

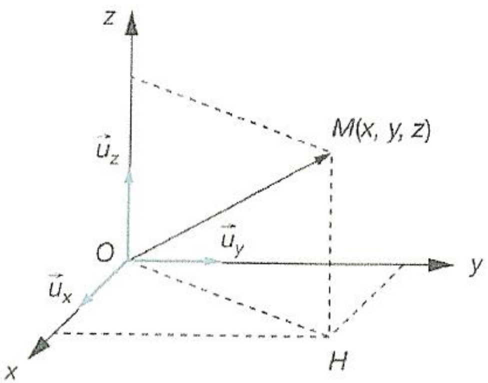
Le mouvement d'un objet dépend de la situation de l'observateur. Pour étudier le mouvement d'un point, il faut donc définir un référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement.
On lui associe un **repère spatial** (origine et système d'axes orthogonaux, avec une unité de mesure spatiale) et un **repère temporel** (origine des temps et unité de mesure temporelle)

On note R le référentiel d'étude, lié au trièdre orthonormé direct (Oxyz), auquel est associé l'échelle de temps dont la date est t.

LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES :

Coordonnées cartésiennes :

Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) d'un point M sont les valeurs algébriques mesurées par rapport au point O des projections orthogonales de M respectivement sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

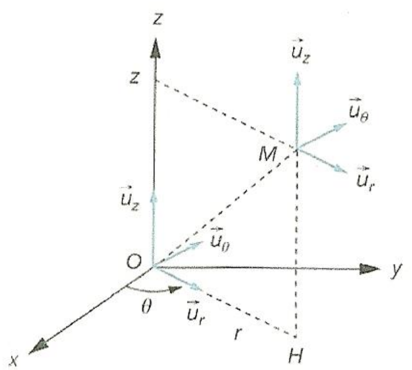


- x est l'abscisse de M : $x \in]-\infty;+\infty[$
- y est l'ordonnée de M : $y \in]-\infty;+\infty[$
- z est la cote de M : $z \in]-\infty;+\infty[$

Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ dirigeant les 3 axes du trièdre (Oxyz).

Cette base est fixe dans R.

Coordonnées cylindriques :



H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy).

Les coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'un point M sont telles que :

- r = OH; $r \in [0;+\infty[$
- $\theta =$ angle orienté entre l'axe Ox et $\overrightarrow{OH}$; $\theta \in [0;2\pi[$
- z est la cote de M ; $z \in]-\infty;+\infty[$

x = r cosθ, y = r sinθ, $x^2 + y^2 = r^2$

Les vecteurs de base sont les vecteurs unitaires $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$:

- $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire dirigé de O vers H.
- $\overrightarrow{u_\theta}$ est le vecteur unitaire appartenant au plan (Oxy), perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$ et dirigé dans le sens des θ croissants.
- $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire dirigé selon l'axe Oz

La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est **mobile dans R**, elle dépend de la position de M à la date t : $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}\right)_R = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$ $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}$ $\left(\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

Remarque : si z = Cte (souvent 0), $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est appelée base polaire (très utiles pour les mouvements circulaires).

VECTEURS POSITION, VITESSE ET ACCELERATION :

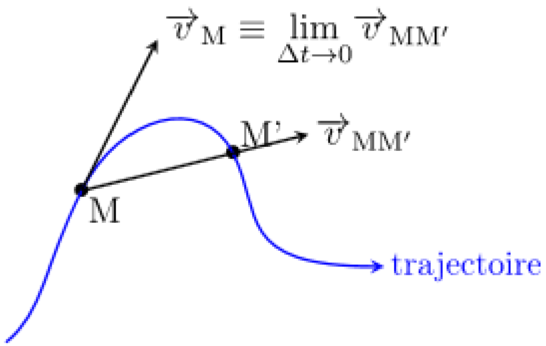
<u>Définitions</u> :

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ donne à chaque instant la position du point M. La trajectoire d'un point en mouvement est l'ensemble de ses positions successives.

- Le vecteur vitesse de M par rapport à R est la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

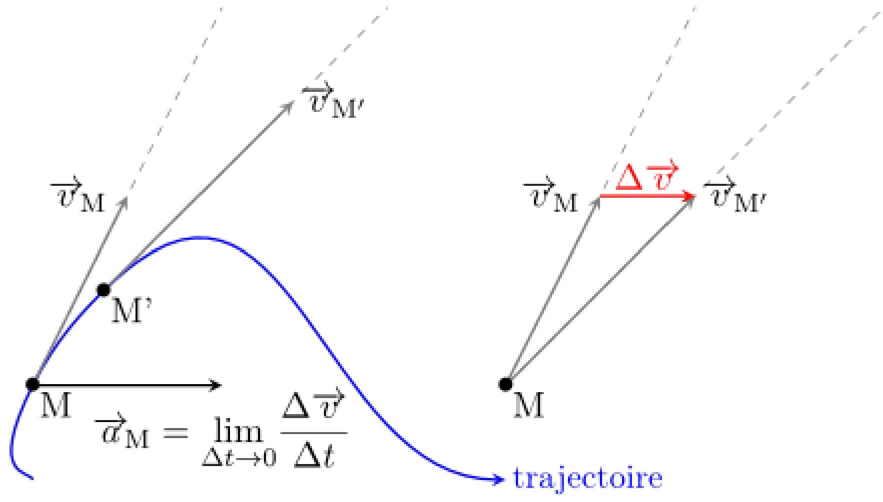
$$\boxed{\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R}$$

Il est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.



- Le vecteur accélération de M par rapport à R donne les variations du vecteur vitesse :

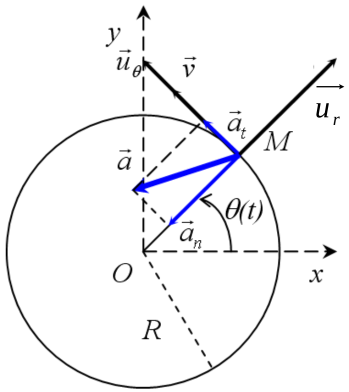
$$\boxed{\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R}.$$



<u>Composantes dans les différentes bases</u> :

Composantes cartésiennes	**Composantes cylindriques**
$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$	$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r + z(t)\vec{u}_z$
$\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$
$\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

EXEMPLES DE MOUVEMENTS SIMPLES :

Mouvement	**Rectiligne**	**Circulaire**
Trajectoire	Portion de droite *Coordonnées cartésiennes dont un axe correspond à la direction de la trajectoire.*	Cercle ou arc de cercle de rayon R *Coordonnées polaires (cercle de centre O et d'axe Oz) :* $\overrightarrow{OM}(t) = R\,\vec{u}_r$
Vecteur vitesse	Porté par la trajectoire	Tangent au cercle *En coordonnées polaires :* $\overrightarrow{v_{M/R}} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$
Vecteur accélération	Porté par la trajectoire	Dans la courbure $\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(-R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(R\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$ $\overrightarrow{a_{M/R}} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$ où $v = R\dot{\theta}$ 1er terme : courbure 2ème terme : variation de la vitesse sur la courbe 
Cas particuliers	***Uniforme*** $\vec{v}_{M/R} = \overrightarrow{Cte}$ ***Uniformément accéléré*** $\vec{a}_{M/R} = \overrightarrow{Cte}$	***Uniforme*** $\dot{\theta} = Cte \Rightarrow \overrightarrow{a_{M/R}} = \left(-R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$